



Olimpiada Națională de Matematică  
Etapa Locală, 17 februarie 2024  
Clasa a VII-a – soluții și bareme

**Problema 1**

a) Verificați dacă numărul  $N$  este rațional, unde

$$N = \sqrt{50 - 30\sqrt{3}} + \sqrt{(4\sqrt{3} - 7)^2} + \sqrt{28 + 16\sqrt{3}} - \sqrt{(-\sqrt{3} - 2)^2}$$

b) Fie  $A = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \dots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2025}}{\sqrt{4096575}}$

Calculați  $[A] + 45\{A\}$ , unde  $[A]$  este partea întreagă și  $\{A\}$  este partea zecimală.

a)  $\sqrt{50 - 30\sqrt{3}} = \sqrt{(5 - 3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3} - 5 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

$\sqrt{28 + 16\sqrt{3}} = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} + 4 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

$\sqrt{(-\sqrt{3} - 2)^2} = |-\sqrt{3} - 2| = \sqrt{3} + 2 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

$A = 3\sqrt{3} - 5 + 7 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} - 2 = 4$  rațional  $\dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

b)  $A = (\frac{1}{\sqrt{3}} - 1) + (\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \dots + (\frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{2023}}) = \frac{1}{45} - 1 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

$[A] = -1 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

$\{A\} = \frac{1}{45}$ , obținem  $[A] + 45\{A\} = -1 + 1 = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

**Problema 2**

Cum  $2(a+b+c)$  este natural rezultă  $\overline{abc}$  este pătrat perfect, rezultă  $\overline{abc} \in \{10^2, \dots, 31^2\} \dots\dots\dots 2 \text{ pct}$

Cum  $2(a+b+c)$  este par rezultă  $\overline{abc}$  este par, rezultă  $\overline{abc} \in \{10^2, 12^2, 14^2, \dots, 30^2\} \dots\dots\dots 2 \text{ pct}$

Verificare  $\dots\dots\dots 2 \text{ pct}$

soluție  $\overline{abc} = 324 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

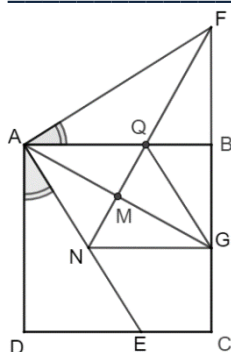
**Problema 3**

Fie  $ABCD$  pătrat și  $E \in (DC)$ . Fie  $F \in BC$  astfel încât  $B$  să fie între  $F$  și  $C$ , iar  $DE = BF$ .

Fie  $G \in (BC)$  astfel încât  $AE = FG$ . Notăm  $M$  mijlocul segmentului  $AG$  și  $AE \cap FM = \{N\}$ .

a) Arătați că  $GQ \perp AF$ , unde  $FM \cap AB = \{Q\}$ ;

b) Arătați că  $ABGN$  este trapez dreptunghic;



a)  $\Delta ADE \equiv \Delta ABF \rightarrow \left. \begin{matrix} AE = AF \\ AE = FG \end{matrix} \right\} \rightarrow \Delta AFG \text{ isoscel} \dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{matrix} [FM] - \text{mediană} \\ \Delta AFG - \text{isoscel} \end{matrix} \right\} \rightarrow FM \text{ înălțime} \dots\dots\dots 1p$

$Q - \text{ortocentrul } \Delta AGF \rightarrow GQ \perp AF \dots\dots\dots 1p$

b)  $\Delta AFM \equiv \Delta GFM \rightarrow \sphericalangle AFM \equiv \sphericalangle GFM \rightarrow [FM \text{ bisectoarea } \sphericalangle AFG] \dots\dots\dots 1p$

$\sphericalangle NAF \equiv \sphericalangle DAB \rightarrow m(\sphericalangle NAF) = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$

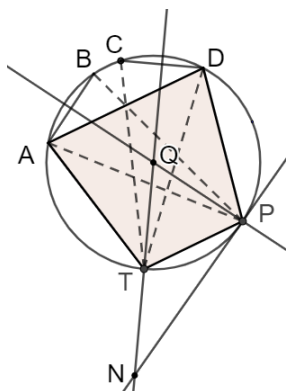
$\Delta ANF \equiv \Delta GNF \rightarrow \sphericalangle NAF \equiv \sphericalangle NGF \dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{matrix} AB \perp CF \\ NG \perp CF \end{matrix} \right\} \rightarrow AB \parallel NG \rightarrow ABGN \text{ trapez dreptunghic} \dots\dots\dots 1p$

#### Problema 4

Fie punctele A, B, C, D situate pe un cerc în această ordine astfel încât suma măsurilor arcelor AB, BC, CD să fie mai mică de  $180^\circ$ , iar  $[AB] \equiv [CD]$ . Mediatoarele segmentelor [AB] și [CD] se intersectează în Q, iar cercul în P respectiv T astfel încât P și T să nu fie pe același semicerc cu punctele A, B, C și D.

- a) dacă N este simetricul lui Q față de T, iar măsura arcului TP este  $60^\circ$  arătați că NP este tangentă la cerc;  
b) arătați că ADPT este trapez isoscel;



a)  $QA = QB = QC = QD \rightarrow Q - \text{centrul cercului} \dots\dots\dots 1p$

Justificare  $\Delta QTP - \text{echilateral} \dots\dots\dots 1p$

Justificare  $\Delta QPN - \text{dreptunghic} \dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{matrix} QP - \text{raza cercului} \\ QP \perp PN \end{matrix} \right\} \rightarrow NP \text{ este tangentă la cerc} \dots\dots\dots 1p$

b)  $\Delta APB \equiv \Delta CTD \rightarrow [AP] \equiv [TD] \dots\dots\dots 1p$

Justificare egalitate arce AT și DP  $\dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{matrix} \sphericalangle DTP \equiv \sphericalangle ADT \\ \text{dar } AT = DP \end{matrix} \right\} \rightarrow ADPT \text{ este trapez isoscel} \dots\dots\dots 1p$

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem,  
se acordă punctajul corespunzător.**